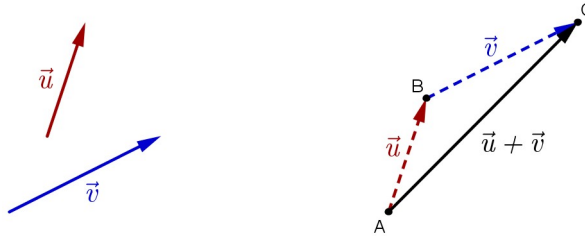


## I – Somme de deux vecteurs

On considère un point  $A$  et deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

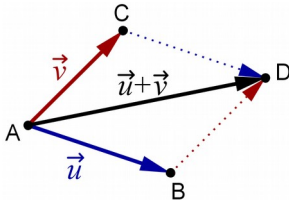
On appelle  $B$  l'image de  $A$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$ , puis on applique à  $B$  la translation de vecteur  $\vec{v}$  (qui donne le point  $C$ ).



Appliquer **à la suite** (composer) ces deux translations revient à effectuer une **translation unique qui transforme directement  $A$  en  $C$**  (de vecteur  $\overrightarrow{AC}$ ).  $\overrightarrow{AC}$  est appelé **vecteur somme** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . On écrira :  $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ .

Méthodes :

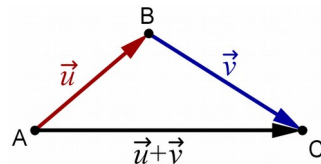
### Règle du parallélogramme



Lorsque les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont **la même origine**, on trace le vecteur somme en complétant la diagonale du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

### Relation de Chasles



Lorsque les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont tels que l'extrémité de l'un est l'origine de l'autre, alors on utilise la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

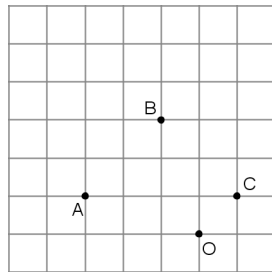
Conséquence :

Soient trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés.

Le point  $D$  est défini par  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  si et seulement si  $ABDC$  est un parallélogramme.

Exemple :

On a placé ci-contre les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ .



① a) Construire le point  $D$  tel que  $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB}$ .

b) En déduire la nature de  $OADB$ .

② Construire le point  $E$  tel que  $\vec{OE} = \vec{AB} + \vec{CB}$ .

③ Compléter les égalités suivantes :

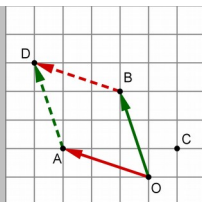
a)  $\vec{AD} = \vec{AB} + \dots \vec{D}$ .      c)  $\vec{B} \dots = \dots \vec{E} + \dots \vec{O}$ .

b)  $\vec{OC} = \dots \vec{A} + \dots$ .      d)  $\dots + \vec{DE} + \dots = \vec{AC}$ .

① a) A partir du point  $O$ , on trace «à la suite» le vecteur  $\vec{OA}$  puis le vecteur  $\vec{OB}$  : on obtient le point  $D$  à l'extrémité.

b) Par définition,  $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB}$ .

Cela signifie que  **$OADB$  est un parallélogramme**.



② A partir du point  $O$ , on trace «à la suite» le vecteur  $\vec{AB}$  puis le vecteur  $\vec{CB}$  : on obtient le point  $E$  à l'extrémité.

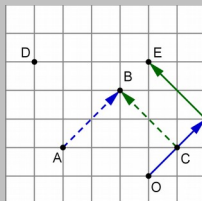
③ On utilise la relation de chasles pour compléter chacune des égalités :

a)  $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$ .

b)  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$ .

c)  $\vec{BO} = \vec{BE} + \vec{EO}$ .

d)  $\vec{AD} + \vec{DE} + \vec{EC} = \vec{AC}$ .

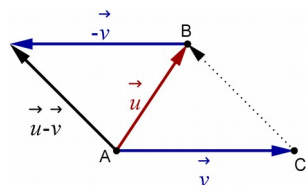


Remarque :

**Soustraire** un vecteur revient à **ajouter son opposé**.

◦  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

◦ ou  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$ .



## II – Multiplication par un nombre réel

Soit  $k$  un nombre réel et  $\vec{u}$  un vecteur.

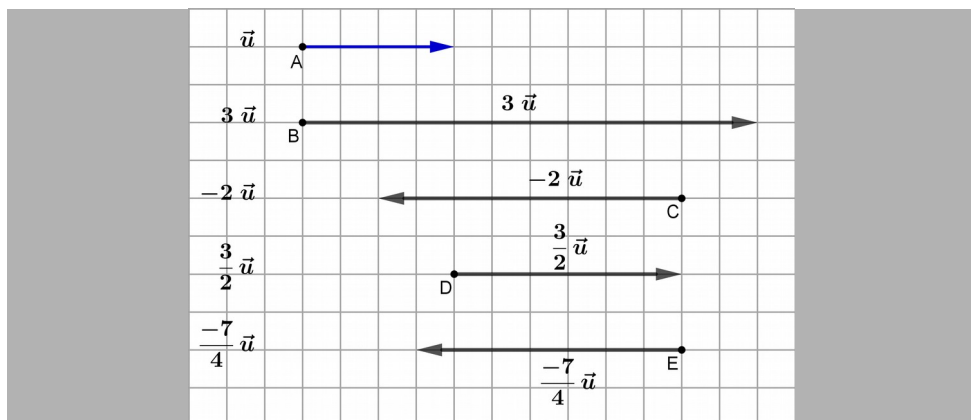
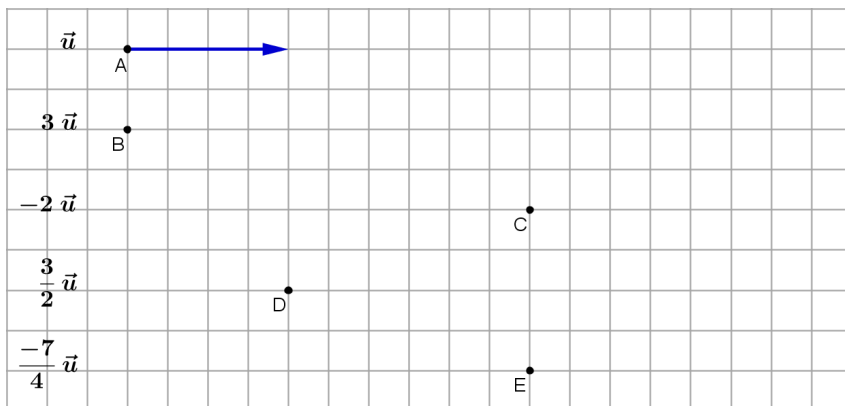
On appelle **produit de  $k$  par  $\vec{u}$**  le vecteur noté  $k\vec{u}$  caractérisé par :

◦ La même direction que  $\vec{u}$ .

◦ Si  $k > 0$ , le même sens que  $\vec{u}$  et une longueur égale à  $k$  fois celle de  $\vec{u}$ .

◦ Si  $k < 0$ , un sens contraire à  $\vec{u}$  et une longueur égale à  $-k$  fois celle de  $\vec{u}$ .

Exemple : Tracer les produits du vecteur  $\vec{u}$  à partir du point indiqué.



Règles de calcul :

Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan et les nombres réels  $k$  et  $p$ , on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$  (distributivité)
- $k\vec{u} + p\vec{u} = (k + p)\vec{u}$
- $k(p\vec{u}) = kp\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$  équivaut à  $k = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$ .

Exemples :

① Exprimer plus simplement le vecteur  $\vec{w} = 2(3\vec{u} - 2\vec{v}) + \frac{1}{2}(4\vec{v} + 5\vec{u})$

$$\vec{w} = 6\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{v} + \frac{5}{2}\vec{u} = \frac{7}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$$

② Le Tangram est un jeu chinois composé de différentes pièces : un carré  $EFHI$ , un parallélogramme  $FGCJ$  et des triangles isocèles rectangles.

a) Compléter les pointillés dans chacune des égalités ci-dessous par un vecteur :

$$\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{FG} = \dots\dots\dots \quad \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{GF} = \dots\dots\dots$$

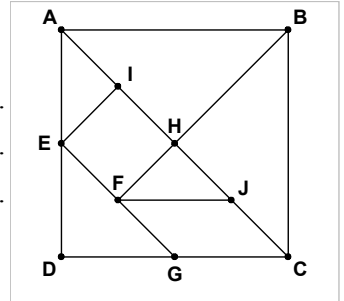
$$\overrightarrow{JH} + \overrightarrow{IA} = \dots\dots\dots \quad \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AH} = \dots\dots\dots$$

$$\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA} = \dots\dots\dots \quad \overrightarrow{HF} - \overrightarrow{BH} = \dots\dots\dots$$

b) Compléter avec le nombre ou la fraction qui convient :

$$\overrightarrow{BH} = \dots\dots \overrightarrow{BF} \quad \overrightarrow{JA} = \dots\dots \overrightarrow{GF}$$

$$\overrightarrow{GF} = \dots\dots \overrightarrow{CA} \quad \overrightarrow{EG} = \dots\dots \overrightarrow{CA}$$



a) Plusieurs réponses sont possibles, une seule suffit dans cet exemple.

$$\circ \quad \overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EJ} \quad \text{règle du parallélogramme}$$

$$\circ \quad \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{GE}$$

$$\circ \quad \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{GA} \quad \text{relation de Chasles}$$

$$\circ \quad \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{GH}$$

$$\circ \quad \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG} \quad \text{règle du parallélogramme}$$

$$\circ \quad \overrightarrow{HF} - \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{FH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{GJ}$$

$$b) \quad \overrightarrow{BH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BF} \quad \overrightarrow{JA} = 3 \overrightarrow{GF}$$

$$\overrightarrow{GF} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CA} \quad \overrightarrow{EG} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{CA}$$

### III – Opérations sur les coordonnées d'un vecteur

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan et soit  $k$  un nombre réel quelconque. On a

$$\textcircled{1} \quad \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad k \vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Exemple :

Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on considère les points  $B(-2; 5)$  et  $C(4; 3)$   
Calculer les coordonnées du point  $P$  défini par  $\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ .

$$\begin{aligned} \circ \begin{cases} x_B - x_P &= -2 - x_P \\ y_B - y_P &= 5 - y_P \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{PB} \begin{pmatrix} -2 - x_P \\ 5 - y_P \end{pmatrix} \\ \circ \begin{cases} x_C - x_P &= 4 - x_P \\ y_C - y_P &= 3 - y_P \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{PC} \begin{pmatrix} 4 - x_P \\ 3 - y_P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◦ Puisque  $\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ , on résout les équations :

$$\begin{aligned} -2 - x_P + 2(4 - x_P) &= 0 & 5 - y_P + 2(3 - y_P) &= 0 \\ -3x_P &= -6 & -3y_P &= -11 \\ x_P &= 2 & y_P &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Les coordonnées de  $P$  sont donc  $P\left(2; \frac{11}{3}\right)$ .

## IV – Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls sont dits **colinéaires** s'ils ont la même direction.  
Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Conséquence :

Deux vecteurs  $\vec{u}$ , et  $\vec{v}$  non nuls sont colinéaires si et seulement si il existe un réel  $k$  non nul tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

Exemple :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que  $3\vec{u} + 4\vec{v} = \vec{0}$ .

Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

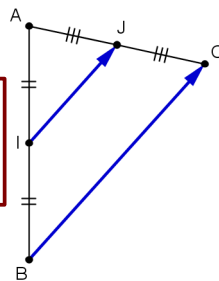
$3\vec{u} + 4\vec{v} = \vec{0}$  d'où  $\vec{u} = -\frac{4}{3}\vec{v}$ . Donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

Théorème des Milieux :

$ABC$  est un triangle quelconque.

Si  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des côtés  $[AB]$  et  $[AC]$ ,

alors  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$ .



Exemple :

$ABCD$  est un quadrilatère quelconque.

On appelle  $I$ ,  $J$ ,  $K$  et  $L$  les milieux respectifs de  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ .

Démontrer que  $IJKL$  est un parallélogramme.

◦ Dans le triangle  $ABD$ ,  $I$  et  $L$  sont les milieux des côtés  $[AB]$  et  $[AD]$ .

D'après le théorème des milieux, on a  $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ .

◦ De manière analogue, dans le triangle  $BCD$ , on a  $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ .

◦ Ainsi  $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK}$  donc  $IJKL$  est un parallélogramme.

## V – Coordonnées et colinéarité

Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles**.

Dans ce cas, il existe un réel  $k$  non nul tel que  $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$

Méthode :

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont colinéaires si et seulement si leur **déterminant** est nul :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = x y' - x' y = 0$$

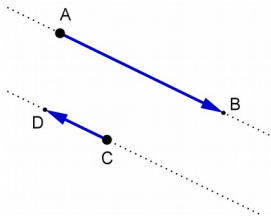
Exemple :

Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , démontrer que  $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$  sont colinéaires.

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = -6 \times (-6) - 9 \times 4 = 36 - 36 = 0 \text{ donc } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

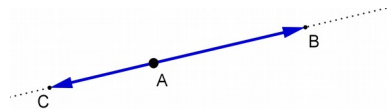
## VI – Applications de la colinéarité

### Démontrer le parallélisme



$\vec{AB} = k \vec{CD}$  équivaut à dire que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

### Démontrer l'alignement



$\vec{AB} = k \vec{AC}$  équivaut à dire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

Exemple :

Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on considère les points  $A(-2; -3)$  ;  $B(12; 4)$  et  $C(4; 0)$ . Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

- $\begin{cases} x_C - x_A = 4 - (-2) = 6 \\ y_C - y_A = 0 - (-3) = 3 \end{cases} \text{ donc } \vec{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} x_B - x_A = 12 - (-2) = 14 \\ y_B - y_A = 4 - (-3) = 7 \end{cases} \text{ donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$
- On a  $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = 6 \times 7 - 3 \times 14 = 0$ .

Puisque  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires, les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.